Inhalt und Maß

Wolfgang Wertz, TU Wien

Dieser Überblick soll einige Grundideen der Maßtheorie vermitteln. Er hält sich weitgehend an geometrische Interpretationen des Maßbegriffes, welcher allerdings auch zu einer überaus wichtigen Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie und andere Anwendungen, auch innermathematischer Art, geworden ist. Obgleich das Gebiet der Maßtheorie kaum ausdrückliche Überschneidungen mit den Lehrplänen für die höheren Schulen aufweist, so bildet es doch über den Integralbegriff, das Cavalieri'sche Prinzip, geometrische Probleme, die Wahrscheinlichkeitsrechnung usw. viele Berührungspunkte mit dem Schulstoff und vermag darüberhinaus den Lehrern ein wichtiges Hintergrundwissen zu bieten. Etliche Themen, die eng mit der Maßtheorie verbunden sind, wie z.B. fraktale Mengen, paradoxe Zerlegungen (vgl. Abschnitt 2), aber auch das weite Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie finden oft Interesse bei Schülern und lassen sich auch im Rahmen von Fachbereichsarbeiten behandeln.

Der geringe Umfang dieses Beitrages erfordert die Beschränkung auf einige wenige Grundtatsachen und nötigt hin und wieder zu unpräzisen Formulierungen und Argumenten. Die am Schluß angeführte Literatur vermag aber diese Lücken zu schließen.

1. Geschichtliche Entwicklung des Maßbegriffes

Das Problem der Berechnung von Längen, vor allem aber von Flächen und Volumina zieht sich durch die gesamte Geschichte der Mathematik. Bereits bei EUKLID (etwa 365 - 300) und anderen Mathematikern der Antike hat es axiomatische Zugänge gegeben, welche stark auf die Axiome der Geometrie aufgebaut waren und nur verhältnismäßig einfache Berechnungen zuließen. Erst am Ende des 19. Jahrhunderts hat eine neue Sichtweise eingesetzt, die eng mit der damals von Georg CANTOR (1845-1918) entwickelten Mengenlehre veknüpft ist und die eine einheitliche und sehr allgemeine axiomatische Betrachtungsweise erlaubt. Anstatt von Länge, Fläche, Volumen einer Punktmenge A spricht man seither ganz allgemein vom *Inhalt* oder vom *Maß* von A, kurz von $m(A)$.

Zur Vereinfachung stelle ich zunächst die Begriffe anhand der Ebene, also des $\mathbb{R}^2$ dar. Vieles davon läßt sich aber auf höhere Dimensionen d übertragen bzw. gilt auch für $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Es gibt aber auch eine Reihe von Problemen, deren Lösung entscheidend von der Dimension abhängt; oft liegt der Unterschied zwischen Dimension $d = 1, 2$ und Dimension $d \geq 3$ an der unterschiedlichen Struktur der entsprechenden Bewegungsgruppen.

Die „elementargeometrische" Berechnung der Fläche von Polygonen A erfolgt vornehmlich durch Zerlegung in Dreiecke und Aufsummieren deren Flächen (vgl. [Hi], § 20). Der Schulunterricht geht, schon aus didaktischen Gründen, etwas anders vor und führt die Dreiecksfläche auf die des Rechteckes zurück, welche natürlich als Länge $\times$ Breite zu berechnen ist. Abb. 1a und 1b liefert zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Fläche eines Parallelogrammes aus der Rechtecksfläche, woraus sich leicht die des Dreieckes ergibt (vgl. [LHR 3]).

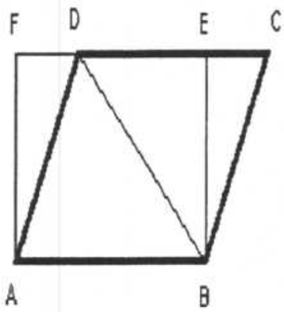

Abb. 1a

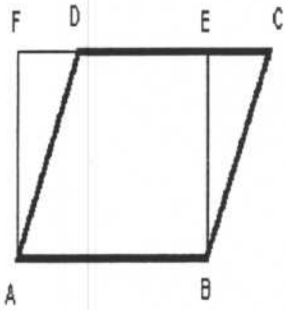

Abb.1b

Diese Methode der „Zerlegung" in Teildreiecke nimmt keinen Bezug darauf, was mit den Rändern der beteiligten Polygone geschieht, es kommt hier zu Doppelzählungen oder zu fehlenden Strecken. Die oft nur undeutlich ausgesprochene Vorstellung, den Rand zum Dreieck zu zählen, ändert nichts an der angesprochenen Problematik. (Definiert man das Dreieck $\Delta = \Delta(A, B, C)$ als die *konvexe Hülle* seiner Eckpunkte A, B, C, also

$$\Delta = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\},$$

wobei unter „+" auch die Vektoraddition zu verstehen ist, so ist Δ abgeschlossen und sein Rand $\partial\Delta$ ist Teilmenge von Δ). Der auf Abb. 2 beruhende Beweis des Satzes von PYTHAGORAS (vgl. [LHR 4]) macht diese Problematik ebenfalls deutlich.

Im Falle des Kreises hingegen zwingt der mehrdeutige Sprachgebrauch zu einer klaren Unterscheidung zwischen *Kreislinie* und *Kreisfläche* und legt auch eine Klassifizierung der Punkte der Ebene in *innere*, *äußere* und *Randpunkte* des

Kreises nahe, und dies bereits in der ersten Klasse der Unterstufe (siehe auch [LHR 1])!

Stillschweigend wird eine Reihe von Annahmen getroffen: Strecken und Punkte haben Fläche 0 und tragen daher nichts zur Fläche bei (schlecht gesagt: „haben keine Fläche"), daher könne man nach Belieben Ränder dazunehmen oder weglassen; kongruente Figuren besitzen die gleiche Fläche (*Bewegungsinvarianz*, s. u.) u. dgl.

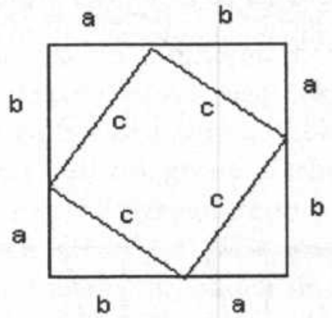

Abb. 2

Solche Annahmen sind aber keineswegs selbstverständlich: So besteht z.B. das Einheitsquadrat E aus (*überabzählbar*) unendlich vielen (parallelen), disjunkten Strecken S_x $(0 \leq x \leq 1)$ der Länge 1. Es gilt zwar $m(E) = 1$, aber $m(S_x) = 0\ \forall x$. Eine Summe von Nullen ergäbe also 1! Diese scheinbare Paradoxie verdeutlicht die Grenzen der Anschauung und die Bedeutung der Hierarchie des Unendlichen und damit die der Mengenlehre (jenseits des Zusammenfassens von Äpfeln und Birnen).

Die klassischen, „elementaren" Flächenberechnungen werfen dennoch viele schwierige Fragen auf. Die beiden auf den ersten Blick evidenten Argumente in Abb. 1 sollen zwei Verfahren motivieren: Bei 1a wird das Parallelogramm $ABCD$ in Dreiecke ABD, BED und BCE zerlegt, das Rechteck $ABEF$ in Dreiecke ABD, BED und ADF. Entsprechende Dreiecke sind kongruent, haben daher gleiche Fläche (Bewegungsinvarianz!) und damit sind die Flächen des Parallelogramms und des Rechtecks gleich. Bei 1b hingegen ergänzt man das Parallelogramm durch das Dreieck ADF, das Rechteck durch das kongruente, also flächengleiche Dreieck BCE; in beiden Fällen ergibt sich das Viereck $ABCF$, das natürlich wieder in, trivialerweise, kongruente Dreiecke zerlegbar ist. Daher stimmen die beiden Flächen überein.

Dese Überlegungen führen auf folgende Begriffsbildungen:

Definition 1.1: Zwei einfache Polygone A und B heißen *zerlegungsgleich*, wenn sie sich in endlich viele Dreiecke $A_1,\ldots,A_n$ bzw. $B_1,\ldots,B_n$ zerlegen lassen, sodaß für alle i A_i und B_i kongruent sind (d.h. durch eine Bewegung β_i ineinander übergehen: $B_i = \beta_i A_i$).

Definition 1.2: Zwei einfache Polygone heißen *ergänzungsgleich*, wenn sich A durch Hinzufügen endlich vieler Polygone $A_1,\ldots,A_n$ und B durch Hinzufügen endlich vieler Polygone $B_1,\ldots,B_n$ so ergänzen lassen, daß zwei zerlegungsgleiche Polygone entstehen, und wobei A_i und B_i $\forall i = 1,...,n$ zerlegungsgleich sind.

Abb. 1a zeigt daher die Zerlegungsgleichheit von Parallelogramm und Rechteck, Abb. 1b deren Ergänzungsgleicheit. - Zerlegungsgleichheit impliziert immer Ergänzungsgleichheit und Gleichheit der Flächen. (Dies gilt auch für alle anderen Dimensionen.)

HILBERT [Hi] erwähnt für die Ebene die Umkehrung, nämlich daß Polygone mit gleicher Fläche zerlegungsgleich sind. (Dieser Satz wurde allerdings bereits 1832 von F. BOLYAI und unabhängig davon 1833 von P. GERWIEN [Ge] bewiesen). *In höheren Dimensionen gilt eine entsprechende Aussage nicht.* Dies ist im wesentlichen die Antwort auf das 3. HILBERTsche Problem.

Für weitere, zum Teil tiefliegende Ergebnisse in dieser Richtung siehe z.B. [Bo], [vDM], [Wa] und das dort angegebene Schrifttum.

Zur Flächen- und Volumsberechnung allgemeinerer, vor allem krummlinig begrenzter Punktmengen haben bereits die alten Griechen Approximationsmethoden entwickelt: zuerst EUDOXOS von KNIDOS (etwa 407 - 355 v. Chr) und EUKLID die *Exhaustionsmethode* und ARCHIMEDES (287 - 212) die *Kompressionsmethode*, dessen berühmte Untersuchung der Archimedischen Spirale, in Polarkoordinaten durch $r = c\varphi$ gegeben, eben diese Methode benützt; sie nimmt implizit einige Ideen des heutigen Inhaltsbegriffes vorweg.

Bei der *Exhaustionsmethode* wird eine gegebene Punktmenge A von innen her durch eine Folge von Polygonen A_n approximiert und $m(A) := \lim_{n\to\infty} m(A_n)$ definiert (vgl. Abb. 3a). Die *Kompressionsmethode* besteht darin, Polgygonfolgen $\underline{A}_n$ und $\overline{A}_n$ zu konstruieren mit $\underline{A}_n \subseteq A \subseteq \overline{A}_n$ und $\lim_{n\to\infty} (m(\overline{A}_n) - m(\underline{A}_n)) = 0$ (vgl. Abb. 3b).

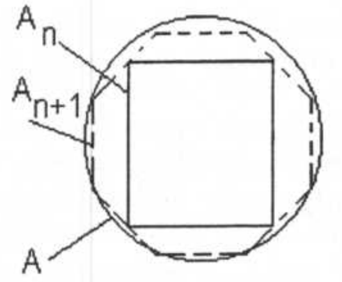

Abb. 3a

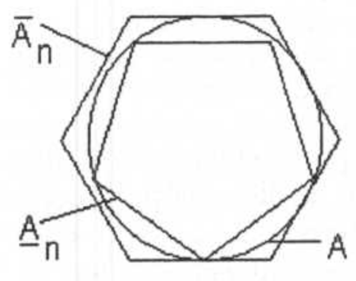

Abb. 3b

Ein wichtiges Verfahren, das bereits ARCHIMEDES in seiner erst 1907 aufgefundenen „Methodenlehre“ $(\acute{\epsilon}\varphi o\delta o\zeta)$bei der Berechnung des Volumens der Kugel benützt hat, ist als *Cavalieri'sches Prinzip* bekannt (Bonaventura CAVALIERI, 1598 - 1647): Wenn $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ die Eigenschaft haben, daß alle *Schnittmengen* $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ und B_x die gleiche Länge besitzen, so gilt *m(A)=m(B)*. (Vgl. Abb. 4)

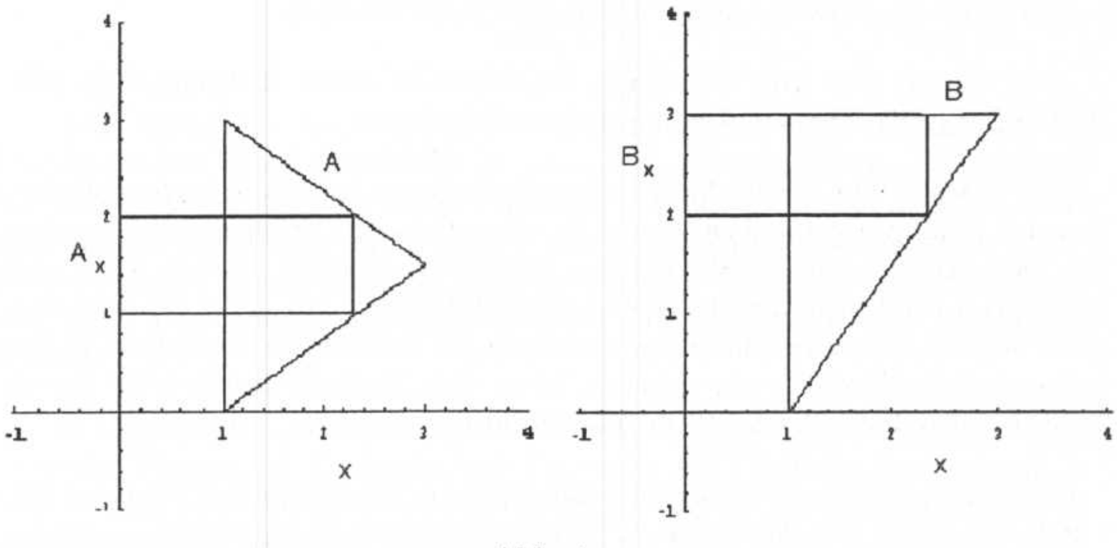

Abb. 4

In der Betrachtungsweise der Maßtheorie läßt sich das Cavalieri'sche Prinzip als Kernstück des Satzes von TONELLI-FUBINI auffassen (siehe Abschnitt 4).

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ' (1646-1716) Definition des Integrals war geometrisch ausgerichtet; bezeichnet für eine nichtnegative Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$O_f := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{1.1}$$

die *Ordinatenmenge* von *f*, so läuft sein Flächenbegriff auf $m(O_f) := \int_a^b f(x)dx$ hinaus.

Eine systematische Theorie des Inhaltes und des Maßes, einschließlich des Integralbegriffes beginnt mit Giuseppe PEANO (1858 - 1932), Camille JORDAN (1838 - 1922), Émile BOREL (1871 - 1956), Henri LEBESGUE (1875 - 1941) und Constantin CARATHÉODORY (1873 - 1950). Besonders wichtige Beiträge lieferten auch die an der Universität Wien wirkenden Mathematiker Hans HAHN (1879 - 1934) und Johann RADON (1887 - 1956).

2. Inhalts- und Maßproblem

Wir verlassen die Betrachtungen des Abschnittes 1 und wenden uns dem axiomatischen Zugang zum Maßbegriff zu. Dieser erlaubt es, die Axiome nicht nur geometrisch zu interpretieren sondern z.B. auch physikalisch, wahrscheinlichkeitstheoretisch usw., er ist also weit allgemeiner. Selbstverständlich dürfen dann bei der Herleitung allgemeiner Sätze aus den Axiomen geometrisch evidente Aussagen *nicht* verwendet werde, sondern die Beweise müssen streng formal geführt werden (vgl. den Beweis von Satz 2.2).

Zunächst zur *Motivation*: Den Begriffen von Länge, Fläche, Volumen, aber auch Masse, Wahrscheinlichkeit u. dgl. von Mengen A, kurz deren *Maß m(A)*, sind folgende Eigenschaften gemeinsam:

$$\begin{aligned} &m(A) \geq 0 \ , \ m(\emptyset) = 0 \ , \\ &m(A \cup B) = m(A) + m(B) \ , \textit{ falls } A \textit{ und } B \textit{ disjunkt sind} \\ &\quad (\textit{also } A \cap B = \emptyset \textit{ gilt}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es soll nun möglichst vielen Mengen (etwa *allen* Teilmengen A des $\mathbb{R}^d$) ein Maß $m(A)$ zugeordnet werden. Bei geometrischen Sachverhalten liegt es nahe zu fordern, daß kongruente Punktmengen gleiches Maß haben und eine einfache Menge, etwa der (halboffene) Einheitswürfel $E := (0,1]^d$ vorgegebenes Maß (z.B. 1) besitzt.

Felix HAUSDORFF hat 1914 in [Ha] das *Inhaltsproblem* folgendermaßen formuliert: Existiert eine Funktion $\iota : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet die Potenzmenge von $\mathbb{R}^d$) mit folgenden Eigenschaften?

$$\iota(A) \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\iota(\emptyset) = 0 \tag{2.3}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \iota(A + B) = \iota(A) + \iota(B) \tag{2.4}$$

$$(A + B := A \cup B \ , \textit{ falls } A \textit{ und } B \textit{ disjunkt sind}).$$

$$\iota(\beta A) = \iota(A) \textit{ für jede Bewegung } \beta \tag{2.5}$$

$$\iota(E) = 1 \tag{2.6}$$

Übrigens folgt durch vollständige Induktion aus (2.4) leicht:

$A_1, ..., A_n$ *disjunkt (d.h.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$*)*

$$\Rightarrow \iota(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \iota(A_i) \qquad (2.4')$$

($\sum$ bezeichnet die Vereinigung *disjunkter* Mengen). Die Eigenschaft (2.4´) heißt *Additivität*, (2.5) *Bewegungsinvarianz* von ι.

Verwandt damit ist das *Maßproblem* (H. LEBESGUE): Existiert eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften?

$$\mu(A) \geq 0 \qquad (2.2)$$

$$\mu(\emptyset) = 0 \qquad (2.3)$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ disjunkte Folge} \Rightarrow \mu(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad (2.7)$$

$$\mu(\beta A) = \mu(A) \quad \textit{für jede Bewegung } \beta \qquad (2.5)$$

$$\mu(E) = 1 \qquad (2.6)$$

Die Eigenschaft (2.7) heißt *Volladditivität von* μ.

Es ist klar, daß jede Lösung μ des Maßproblems auch eine Lösung ι des Inhaltsproblems liefert. Es zeigt sich, daß diese Probleme im Rahmen der Axiome der ZERMELO-FRÄNKEL'schen Mengenlehre (ZF) nicht entscheidbar sind. Eine entscheidende Rolle spielt dabei die Hinzunahme des Auswahlaxioms (von ZERMELO) bzw. verwandter Bedingungen:

Auswahlaxiom(AC): $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sei eine nichtleere Familie nichtleerer Mengen. Dann $\exists$ Funktion $\varphi : \Lambda \to \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ mit $\varphi(\lambda) \in A_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Anders ausgedrückt: Das Cartesische Produkt nichtleerer Mengen ist nichtleer.

(Als Literatur zur Mengenlehre sind das einfach geschriebene Buch [Hl], viel ausführlicher [Je 1] zu nennen; speziell die Problematik des Auswahlaxioms wird in [Je 2], [Mo], [Wa] u.a. behandelt. Einen guten Einstieg stellt auch [Go] dar.)

Ein wichtiges Hilfsmittel ist die folgende überraschende Paradoxie:

Satz 2.1 (Stefan BANACH und Alfred TARSKI, 1924): *Gelte* (AC) *und* $d \geq 3$. $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ *seien beschränkte Mengen mit inneren Punkten.*
Dann $\exists n \in \mathbb{N}, \exists A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^d$, *disjunkt*, $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n$ (*Bewegungen des* $\mathbb{R}^d$): $\beta_1(A_1), \ldots, \beta_n(A_n)$ *sind disjunkt*, $A = \sum_{i=1}^n A_i$ *und* $B = \sum_{i=1}^n \beta_i(A_i)$.

Dies hat etwa folgende Konsequenz: *Eine* Kugel vom Radius 1 läßt sich so in endlich viele Teile $A_1, \ldots, A_n$ zerlegen, daß *zwei gleich große* Kugeln entstehen, wenn man $A_1, \ldots, A_n$ im Raum geeignet bewegt und dann wieder zusammensetzt. (Übrigens kann in diesem Beispiel $n = 5$ gewählt werden). Dieses Ergebnis entbehrt völlig der Anschaulichkeit und widerspricht jeder physikalischen Erfahrung: Einige der Mengen A_i weisen dabei eine derart komplizierte Struktur auf, daß man ihnen nicht sinnvoll ein Maß zuordnen kann.

Der *Beweis* von Satz 2.1 läßt sich zwar elementar führen, ist aber kompliziert (siehe z.B. [Ha], [St] oder [Wa]). Mit Hilfe von 2.1 ergibt sich eine teilweise Antwort auf das Inhaltsproblem:

Satz 2.2: *Es gelte (AC). Das Inhaltsproblem ist für $d \geq 3$ unlösbar.*

Beweis: Angenommen, ι sei Lösung mit (2.2) - (2.6). Es seien A und B sowie $A_1, \ldots, A_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$ wie in Satz 2.1. Wegen der Additivität und Bewegungsinvarianz von ι gilt:

$$\iota(B) = \iota(\sum_{i=1}^n \beta_i(A_i)) =_{(2.4')} \sum_{i=1}^n \iota(\beta_i(A_i)) =_{(2.5)} \sum_{i=1}^n \iota(A_i) =$$
$$=_{(2.4')} \iota(\sum_{i=1}^n A_i) = \iota(A). \tag{2.8}$$

Wählt man $A := E = (0,1]^3$, also den Einheitswürfel, und $B := (0,2] \times (0,1]^2 = (0,1]^3 + (1,2] \times (0,1]^2 = A + [(1,0,0)' + A]$, so folgt

$$\iota(B) = \iota(A) + \iota[(1,0,0)' + A] = \iota(A) + \iota(A) = 2\iota(A) = 2,$$

im Widerspruch zu (2.8).

q.e.d.

Hingegen läßt sich zeigen:

Satz 2.3 (BANACH, 1923): *Es gelte (AC). Das Inhaltsproblem ist für $d = 1$ und 2 lösbar, aber nicht eindeutig.*

Ein Beweis ist z.B. bei [Za] zu finden.

Die Unlösbarkeit des Maßproblems für $d = 1$ hat bereits Guiseppe VITALI 1905 bewiesen. Für Dimension $d \geq 3$ folgt sie aus Satz 2.2.

Eine Möglichkeit besteht nun darin, nicht allen, sondern nur bestimmten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ ein Maß zuzuordnen. Diese Mengen müssen sinnvollerweise bestimmte Bedingungen erfüllen, wie sie etwa in folgender Definition ausgedrückt werden.

Definition 2.4: Es sei Ω eine nichtleere Menge. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *(Mengen-) Ring* über Ω, wenn gilt: $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{R}$.

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ genau dann ein Ring ist, wenn $\mathcal{R} \neq \emptyset$ und mit A und B auch $A \cap B$ und $A \Delta B$ (:=$(A\backslash B) \cup (B \backslash A)$: *symmetrische Differenz)* in $\mathcal{R}$ sind. - $\mathcal{R}$ bildet mit den beiden Operationen $(A,B) \mapsto A\Delta B$ und $(A,B) \mapsto A \cap B$ einen kommutativen Ring mit Einselement (im Sinne der Algebra) - so erklärt sich auch die Bezeichnung „Mengenring".

Definition 2.5: $\mathcal{R}$ sei ein Ring über Ω. Eine Funktion $\iota : \mathcal{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mit (2.1) bis (2.3) (für $A, B, \ldots \in \mathcal{R}$!) heißt *Inhalt* auf $\mathcal{R}$.

ι heißt *endlich*, falls $\iota(A) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{R}$.

Da jeder Ring auch bezüglich der Bildung endlicher Vereinigungen abgeschlossen ist, gilt (2.4´) entsprechend. Ein Inhalt ist also eine nichtnegative, additive Funktion auf $\mathcal{R}$ mit $\iota(\emptyset) = 0$.

Beispiel 2.6: Sei $d \geq 1$ eine gegebene Dimension. Jede Menge A der Gestalt

$$A = \times_{i=1}^{d}(a_i, b_i] \quad mit - \infty < a_i \leq b_i < \infty \quad \forall i = 1, ..., d \tag{2.9}$$

heißt *d-dimensionales (halboffenes) Intervall.* $\mathcal{I}_d$ bezeichnet die Menge aller d-dimensionalen Intervalle.

$\mathcal{F}_d := \{\cup_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{I}_d\}$ bildet einen Ring, den *Ring der d-dimensionalen Figuren.* Für ihn gilt:

$$\mathcal{F}_d := \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{I}_d, disjunkt\}. \tag{2.10}$$

Der elementare Inhalt von $A \in \mathcal{I}_d$ ist

$$m_d(A) := \textstyle\prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i), \tag{2.11}$$

wobei A die Form (2.9) besitzt. Für jede Figur $A \in \mathcal{F}_d$, die sich nach (2.10) schreiben läßt, sei

$$\iota_d(A) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} m_d(A_i). \tag{2.12}$$

Dann definiert (2.12) einen Inhalt auf $\mathcal{F}_d$, der auf $\mathcal{I}_d$ mit m_d übereinstimmt (der also m_d von $\mathcal{I}_d$ auf $\mathcal{F}_d$ *fortsetzt*).

Übrigens erfüllt ι_d die Eigenschaft der Volladditivität, (2.7), soferne nur die $A_n \in \mathcal{R}$ gewählt sind und zusätzlich $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ verlangt wird (vgl. Abschnitt 4).

Die Verwendung halboffener Intervalle hat den entscheidenden Vorteil, daß auch dann, wenn Punkte, Hyperebenen u.dgl. positives Maß haben können (wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie oder bei Massenverteilungen), bei der Additivität keine Schwierigkeiten auftreten. So wird auch eine weit allgemeinere Definition als (2.11) als Ausgangspunkt möglich.

3. Der Jordan'sche Inhalt

Der in der Folge konstruierte Inhalt wird auf einem wesentlich größeren Ring als $\mathcal{F}_d$ definiert. Die Konstruktion erfolgt ähnlich derjenigen, die Karl MAYRHOFER (1899 - 1969) in seiner Monographie [Ma] durchführt, er legt allerdings abgeschlossene Würfel anstatt halboffener zugrunde. Ein etwas anderer Zugang findet sich bei [Wl]. PEANO und JORDAN sind ursprünglich von Polygonen ausgegangen, was aber viel mehr elementargeometrische Überlegungen erfordert und sich daher als sehr aufwendig erweist. Der Weg, den ich im Folgenden wähle, vereinfacht manche Überlegungen und erleichtert die Inhaltsbestimmung konkreter Mengen beträchtlich. Ein wesentlicher Vorteil der Verwendung von Würfeln anstelle von Intervallen oder Polygonen liegt auch im konstanten Verhältnis ihrer Kantenlängen.

Ein *Gitter* Γ in $\mathbb{R}^d$ ist die Vereinigung aller äquidistanten Hyperebenen, die alle auf Koordinatenachsen senkrecht stehen und die einen festen Bezugspunkt haben. Ihr Abstand, $c_\Gamma > 0$, heißt *(Gitter-) Weite von* Γ.

Sind Γ_1 und Γ_2 Gitter, so heißt Γ_2 *Verfeinerung* von Γ_1 ($\Gamma_1 \prec \Gamma_2$), wenn $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ gilt und wenn c_{Γ_1} ein ganzzahliges Vielfaches von c_{Γ_2} ist.

Eine Folge $\Gamma^* := (\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gittern Γ_n heißt *monotone Gitterfolge*, falls $\Gamma_n \prec \Gamma_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

Daraus folgt insbesondere, daß es einen gemeinsamen Bezugspunkt $P = (p_1, \ldots, p_d)'$ für alle Γ_n gibt und daß $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ gilt, wo $c_n = c_{\Gamma_n}$ bezeichnet.

Jede Menge der Gestalt

$$W = \times_{i=1}^{d}(p_i + k_i c_n, p_i + (k_i + 1)c_n] \tag{3.1}$$

mit $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{Z}$ heißt ein *Würfel aus* Γ_n; $\mathcal{W}_n$ bezeichne die Menge dieser Würfel, $\mathcal{W} := \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{W}_n$ bezeichne die Menge aller Würfel aus Γ. Die Mengenfamilie

$$\mathcal{A} := \{\cup_{j=1}^{k} W_j : W_j \in \mathcal{W} \quad \text{für } j = 1, \ldots, k, \quad k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \tag{3.2}$$

bildet dann einen Ring und heißt *Ring der Würfelaggregate von* Γ.

Jedes $A \in \mathcal{A}$ läßt sich auch als Vereinigung von endlich vielen *disjunkten* Würfeln aus einem *festen* Gitter Γ_n (n hinreichend groß) darstellen:

$$A = \sum_{j=1}^{l} W_j, \quad W_j \in \mathcal{W}_n. \tag{3.3}$$

Definiert man

$$i(W) = c_n^d, \text{ wenn } W \in \mathcal{W}_n,$$

so läßt sich i mittels der Darstellung (3.3) auf ganz A fortsetzen durch

$$i(A) := \sum_{j=1}^{l} i(W_j) = l.c_n^d$$

Es ist leicht einzusehen, daß i ein Inhalt auf A ist. Er heißt *elementarer Inhalt der Würfelaggregate* (bezüglich Γ^*). Sodann wendet man die Kompressionsmethode an:

Definition 3.1: Eine beschränkte Menge A heißt *quadrierbar* (oder *Jordan - meßbar*) *bezüglich* Γ^*, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\; \underline{A}, \overline{A} \in \mathcal{A} : \underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A},\; i(\overline{A}) - i(\underline{A}) < \varepsilon \tag{3.4}$$

(Vgl. Abb. 5)
Die *Menge aller quadrierbaren Mengen A* werde mit $\mathcal{Q}$ bezeichnet.

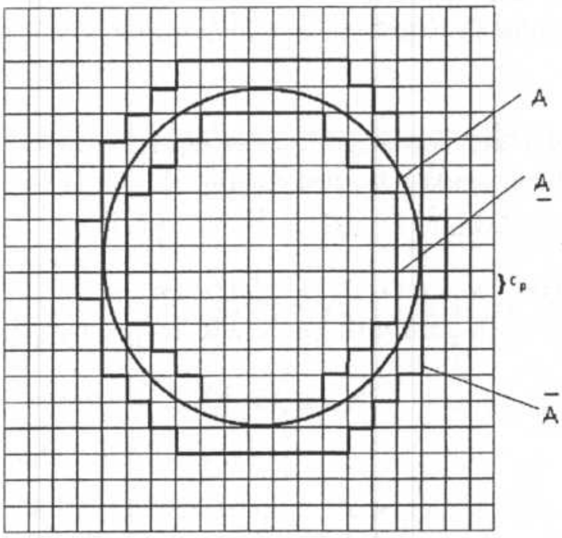

Abb. 5

Definition 3.2: *Für jede beschränkte Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sei

$\bar{i}(M) := \inf\{i(B) : B \in \mathcal{A}, B \supseteq M\}$

und

$\underline{i}(M) := \sup\{i(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq M\}$.

$\bar{i}(M)$ heißt *äußerer*, $\underline{i}$ *(M) innerer Inhalt von M.* ($\bar{i}$ und $\underline{i}$ sind jedoch nicht Inhalte: (2.4) ist nicht erfüllt.

Für jedes $A \in \mathcal{Q}$ existiert genau eine Zahl $j(A) \in \mathbb{R}$ mit $j(A) = \underline{i}(A) = \bar{i}(A)$. *j(A)* heißt *Jordanscher Inhalt von A.* (Falls die Dimension *d* hervorgehoben werden soll, schreibe ich in der Folge j_d anstelle von j). Es läßt sich der Reihe nach Folgendes beweisen:

1. Jedes $A \in \mathcal{I}_d$ ist quadrierbar und es gilt
   $$j(A) = m_d(A) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \tag{3.5}$$
   (vgl. (2.11)), unabhängig von der zugrundegelegten Gitterfolge Γ^*.

2. Die Quadrierbarkeit einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und der Wert *j(M)* sind unabhängig von der gewählten Gittferfolge Γ^*.

3. $\mathcal{Q}$ ist ein Ring.

4. j ist ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{Q}$.

5. j ist sogar ein volladditiver Inhalt auf $\mathcal{Q}$, dh.:

   Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von disjunkten Mengen aus $\mathcal{Q}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{Q}$, so folgt $j(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} j(A_n)$

6. j ist *bewegungsinvariant.*

Jede Menge $N \in \mathcal{Q}$ mit $j(N) = 0$ heißt *(Jordan'sche) Nullmenge.*

Für beschränktes $M \subseteq \mathbb{R}^d$ reicht die Bedingung $\bar{\imath}(M) = 0$ dafür aus, daß M eine j-Nullmenge ist. Daher ist jede Teilmenge einer j-Nullmenge auch quadrierbar und eine j-Nullmenge. Diese Eigenschaft des Jordan'schen Inhaltes heißt *Vollständigkeit von j.* Daraus ergibt sich das *Jordan'sche Quadrierbarkeitskriterium:*

Satz 3.3: *$M \subseteq \mathbb{R}^d$ sei beschränkt. Dann gilt:* $M \in \mathcal{Q} \;\Leftrightarrow\; j(\partial M) = 0.$

(Dabei bezeichnet ∂M den (topologischen) *Rand von M*).

Für die Quadrierbarkeit einer Menge ist also maßgeblich, ob der Rand eine „kleine“ Menge ist.

Es ist leicht zu erkennen, daß einzelne Punkte und endliche Mengen A quadrierbar sind mit $j(A)=0$. Es sind auch alle beschränkten konvexen Mengen A quadrierbar, dabei kommt es nicht daruf an, ob Teile des Randes ∂A dazugezählt werden.

Im allgemeinen ist eine abzählbar unendliche Vereinigung von Jordan-meßbaren Mengen nicht wieder Jordan-meßbar. Als Beispiele mögen dienen:

1. $M = (\mathbb{Q} \cap [0,1])^2,$ (3.6)

   die rationalen Zahlen des (abgeschlossenen) Einheitsquadrates;

2. $M = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times [0,1]\ .$ (3.7)

   In beiden Fällen gilt nämlich offensichtlich $\underline{i}(M) = 0$ und $\bar{\imath}(M) = 1$. Ein anderes Argument liefert Satz 3.3: $\partial M = [0,1]^2$, daher ist $j\,(\partial M) = 1 > 0$.

3. Es gibt beschränkte *abgeschlossene* und auch *offene* Mengen, die nicht quadrierbar sind. Beispiele sind bestimmte Diskontinua, also fraktale Mengen, die dem Cantor'schen Diskontinuum ähnlich sind.

Diese Beispiele zeigen, daß der *Jordan'sche Inhalt in mancher Hinsicht unbefriedigend* ist: Einerseits sind relativ kleine (abzählbar unendliche) und topologisch wichtige (offene, abgeschlossene) Mengen nicht quadrierbar.

Zwischen dem Jordan'schen Inhalt der Ebene und dem Riemannschen Integral besteht ein enger Zusammenhang, der auch die Unzulänglichkeit dieses Integralbegriffes deutlich macht:

Satz 3.4: *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:*

f ist Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow$ O_f ist quadrierbar

In diesem Falle gilt: $j_2(O_f) = \int\limits_a^b f(x)dx$. (Vgl. (1.1)).

Die *Dirichlet'sche Funktion*

$$f(x) := 1, \text{ falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ und } := 0, \text{ falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \tag{3.8}$$

besitzt die Menge (3.7) als Ordinatenmenge und ist daher nach Satz 3.4 nicht Riemann-integrierbar. Dies läßt sich auch daraus schließen, daß die oberen Darboux'schen Summen von f $= 1$ und die unteren Darboux'schen Summen $= 0$ sind.

4. Maß und abstraktes Lebesgue-Integral

Die in Abschnitt 3 angeführten Unzulänglichkeiten erfordern einen neuen Zugang, der auch eine Erweiterung des Riemannschen Integrals erlaubt.

Ausgangspunkt ist die Forderung nach Volladditivität (vgl. (2.7)), die in der Geometrie und vor allem der Wahrscheinlichkeitstheorie naheliegt. So wie für Inhalte Ringe die natürlichen Definitionsbereiche darstellen, werden für Maße σ-Algebren dienen:

Definition 4.1: *Es sei Ω eine nichtleere Menge. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn gilt:*

$\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge aus* $\mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Es ist leicht einzusehen, daß jede σ-Algebra ein Ring ist. Der folgende Satz läßt sich verhältnismäßig einfach zeigen:

Satz 4.2: *$\mathcal{R}$ sei ein beliebiger Ring über Ω. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} = A_\sigma(\mathcal{R})$, die $\mathcal{R}$ enthält. $A_\sigma(\mathcal{R})$ heißt die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra.*

Vorsicht: $A_\sigma(\mathcal{R})$ läßt sich im allgemeinen nicht *konstruktiv* aus $\mathcal{R}$ angeben!

Die von $\mathcal{F}_d$, dem Ring der d-dimensionalen Figuren (2.10), erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}_d := A_\sigma(\mathcal{F}_d)$ heißt die *σ-Algebra der Borel'schen Mengen*. - $\mathcal{B}_d$ enthält insbesondere alle abzählbar unendlichen, offenen, abgschlossenen und kompakten Mengen des $\mathbb{R}^d$.

Definition 4.3: $\mathcal{A}$ sei eine σ-Algebra über Ω. $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Maß auf* $\mathcal{A}$, wenn (2.2), (2.3) und (2.7) so erfüllt sind, daß diese Bedingungen $\forall A, A_n, ... \in \mathcal{A}$ gelten.

Für die Konstruktion von Maßen ist der *Fortsetzungssatz für Maße* wichtig:

Satz 4.4: *Ist ι ein volladditiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$, dann existiert genau ein Maß μ auf $A_\sigma(\mathcal{R})$, das ι fortsetzt.*

Der Beweis dieses Satzes macht einen bemerkenswerten Unterschied zum Jordan'schen Inhalt deutlich: μ ergibt sich aus ι dadurch, daß man die Mengen $A \in A_\sigma(\mathcal{R})$ durch *abzählbar unendliche* Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{R}$, aber *nur von außen* approximiert. - Geht man von $\mathcal{R} = \mathcal{F}_d$ aus, und ist ι_d durch (2.12) bestimmt, dann existiert genau eine Fortsetzung μ_d auf $\mathcal{B}_d$. μ_d heißt das *d-dimensionale LEBESGUE-BOREL-Maß (L-B-Maß)*. Dieses Maß ist nicht vollständig wie es j_d ist:

Definition 4.5: Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *vollständig*, wenn gilt:
$A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{A}$.

Es ist leicht einzusehen, daß zu μ_d ein vollständiges Maß λ_d existiert, das μ_d fortsetzt: Es sei

$$\mathcal{L}_d := \{B \cup N : B \in \mathcal{B}_d, \exists A \in \mathcal{B}_d : \mu(A) = 0, N \subseteq A\}$$

und

$$\lambda_d(B \cup N) := \mu_d(B).$$

Dann bildet $\mathcal{L}_d$ eine σ-Algebra (die *σ-Algebra der Lebesgue'schen Mengen*) und λ_d ist ein auf $\mathcal{L}_d$ definiertes, vollständiges Maß. λ_d heißt das *d-dimensionale Lebesgue-Maß.*

Der Zusammenhang zwischen $\mathcal{Q}_d := \mathcal{Q}$, $\mathcal{B}_d$ und $\mathcal{L}_d$ stellt sich wie folgt dar: $\mathcal{Q}_d \subseteq \mathcal{L}_d$, $\mathcal{Q}_d \not\subseteq \mathcal{B}_d$ und $\mathcal{B}_d \not\subseteq \mathcal{Q}_d$. Dabei ist die erste Inklusion nach der Definition klar; die beiden anderen Aussagen lassen sich durch Gegenbeispiele zeigen: Die Cantor'sche Menge C ist in $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{B}_1$ enthalten; für sie gilt $\mu_1(C) = j_1(C) = 0$, daher gehört jede Teilmenge $M \subseteq C$ zu $\mathcal{Q}_1$, aber $\exists M \subseteq C : M \notin \mathcal{B}_1$. Umgekehrt ist $\mathbb{Q} \cap [0,1] \in \mathcal{B}_1$, aber $\notin \mathcal{Q}_1$. - Die Mengen (3.6) und (3.7) sind Borel-Mengen, ebenso *alle* abzählbar unendlichen Mengen; das Maß all dieser Mengen ist $=0$.

Mit Hilfe von Maßen μ, insbesondere mit μ_d und λ_d, lassen sich Integralbegriffe aufbauen; die Einzelheiten dieser Konstruktion würden den Rahmen dieser Darstellung jedoch überschreiten. Ich skizziere die Ideen daher nur grob und verweise besonders auf die Bücher [Ba] und [El]. - Zunächst bedarf es einer Klasse von Funktionen, die als Integranden der (abstrakten) Lebesgue'schen Integrationstheorie in Frage kommen.

Definition 4.6: Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *($\mathcal{A}$-) meßbar*, wenn

$$\{x \in \Omega : a < f(x) \leq b\} \in \mathcal{A} \quad \forall a, b : -\infty < a < b < \infty \tag{4.1}$$

gilt. Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}_d$ spricht man von *Borel-meßbaren* und im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{L}_d$ von *Lebesgue-meßbaren Funktionen.*

Diese Definition ist jener der stetigen Funktionen ähnlich („Urbilder offener Mengen sind offen"). Tatsächlich spielen in der Maßtheorie meßbare Funktionen eine ähnliche, der Struktur angepaßte Rolle wie stetige Funktionen in der Topologie.

Ist f eine *Elementarfunktion*, d.h. ist f meßbar und nimmt f nur endlich viele Werte $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0$ an, dann definiert man

$$\int f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu\left(\{x \in \Omega : f(x) = \alpha_i\}\right)$$

als *μ-Integral von f.* Jede *nichtnegative meßbare* Funktion f läßt sich durch eine monoton wachsende Folge (f_n) von Elementarfunktionen punktweise approximieren: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Das *$\mu$-Integral von f* wird dann durch $\int f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$ definiert. Das *μ-Integral* für *beliebige meßbare Funktionen f* beruht auf der Zerlegung von f in Positiv- und Negativteil (das Integral läßt sich jedoch nicht für *jede* meßbare Funktion sinnvoll definieren).

Die folgenden Sätze klären den Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue - Integral:

Satz 4.7: *$[a,b]$ sei ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, S_f die Menge der Stetigkeitspunkte von f. Dann folgt:*

f ist Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow$ f ist beschränkt und $\lambda_1([a,b] \backslash S_f) = 0$

Daraus ergibt sich sofort, daß die Dirichlet'sche Funktion (3.8), die auf ganz $[0,1]$ unstetig ist, nicht Riemann-integrierbar sein kann. Die folgende Modifizierung dieser Funktion erweist sich aber als Riemann-integrierbar:

$g(x) := \frac{1}{q(x)}$, falls $x = \frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit teilerfremden $p(x), q(x) \in \mathbb{N}$ gilt, und $:= 0$, falls $x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$. S_f besteht dann aus allen irrationalen Zahlen von $[0,1]$, daher ist $\lambda_1([0,1] \backslash S_f) = \lambda_1([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$.

Satz 4.8: *$[a,b]$ sei ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f Lebesgue-meßbar und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int f\, d\lambda_1.$$

Dieser Satz zeigt, daß das Lebesgue-Integral das Riemann-Integral verallgemeinert und daß die beiden Integralbegriffe verträglich sind. Jedoch ist *nicht jede*

Riemann-integrierbare Funktion auch Borel-meßbar! Für uneigentliche Riemann-Integrale ist der Zusammenhang ähnlich, aber nicht so einfach zu formulieren.

Der Zusammenhang zwischen Integral und Ordinatenmenge stellt sich ähnlich dar wie in Abschnitt 3: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist genau dann Borel-meßbar, wenn ihre Ordinatenmenge $O_f \in \mathcal{B}_{d+1}$ ist und

$$\mu_{d+1}(O_f) = \int f \, d\mu_d \tag{4.2}$$

(Für das Lebesgue - Integral gilt eine ähnliche Aussage.)

Für eine gegebene Menge $A \in \mathcal{B}_{d+1}$ seien

$A_y := \{x \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in A\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^1$

die Schnittmengen, und es sei $f(y) := \mu_1(A_y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Dann folgt ähnlich wie (4.2):

$$\mu_{d+1}(A) = \int \mu_d(A_y) d\mu_1(y) = \int f d\mu_1$$

Dies ist eine exakte Fassung des Cavalieri´schen Prinzips.

Das Lebesgue-Integral hat gegenüber dem Riemann-Integral eine Reihe von Vorteilen, z.B., daß sich die Bedingungen für Vertauschung von Limes und Integral recht einfach darstellen lassen, und daß die Einschränkung auf endlichdimensionale Räume nicht erforderlich ist.

5. Literaturhinweise

Die Lehrbuchliterateratur zur Maßtheorie, insbesondere auch für speziellere Teilgebiete, ist sehr umfangreich. Als einführende, ausführliche Darstellungen der *Maßtheorie* in deutscher Sprache empfehle ich vor allem [Ba] und [El], die auch zahlreiche Hinweise auf weiterführendes Schrittum geben. Auch in vielen Büchern über Analysis sind einige Kapitel diesem Thema gewidmet, z.B. [Wl]; das ausgezeichnete Lehrbuch [He] widmet ein Kapitel einem direkten Zugang zum Lebesgue-Integral. Die *Inhaltstheorie* findet sich vor allem bei [Ma], einige kürzere Ausführungen dazu bei [Wl] und [El]. Verschiedene *Integrationstheorien* werden etwa in [De], [Pe] und [vDM] behandelt; [vDM] widmet sich besonders der geschichtlichen Entwicklung der Mengenlehre und Integrationtheorie. In manchen Büchern über Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Maßtheorie anhand des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entwickelt (z. B. [Ne], [Sch]); allerdings kommen dabei kaum geometrische Gesichtspunkte zur Sprache. Speziellen geometrischen Fragen wie *fraktalen Mengen*, Dimensionstheorie, raumfüllenden Kurven, sind [Sa] und [Mt] gewidmet; [Mt] gehört zu den wenigen Büchern, die Fraktale in mathematisch befriedigender Weise behandeln, ist aber dementsprechend anspruchsvoll - bunte Bilder von fraktalen Mengen enthält es keine. Bücher über *Mengenlehre* habe ich am Beginn von Abschnitt 2 bereits erwähnt.

[Ba] BAUER, H.: Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage.
W. de Gruyter, Berlin, 1992

[Bo] BOLTIANSKII, V.G.: Hilbert's Third Problem.
V.H. Winston & Sons, Washington, 1978.

[De] DEHEUVELS, P.: L'intégrale.
Presses Universitaires de France, Paris, 1980.

[vDM] van DALEN, D.; MONNA, A.: Sets and Integration.
Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

[El] ELSTROD, J.: Maß- und Integrationstheorie.
Springer, Berlin, 1996.

[Ge] GERWIEN, P.: Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke.
J. Reine Angew. Math. **10** *(1833), 228-234.*

[Go] GOLDSTERN, M.: Mengenlehre: Hierarchie des Unendlichen.
Didaktikhefte, Heft 32, Wien, 2000, 59-72.

[Ha] HAUSDORFF, F.: Grundzüge der Mengenlehre.
Veit&Co, Leipzig, 1914.

[He] HEUSER, H.: Lehrbuch der Analysis (2 Bände).
B.G.Teuber, Stuttgart, 1990 und 1991.

[Hi] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie.
Teubner, Leipzig, 1899.

[Hl] HALMOS, P.: Naive Set Theory.
Springer, Heidelberg, 1974

[Je1] JECH, T.: Set Theory.
Academic Press, New York, 1978.

[Je2] JECH, T.: The Axiom of Choice.
North Holland, Amsterdam, 1973..

[Le] LEBESGUE, H.: Intégrale, longeur, aire.
Thèse, Paris, 1902.

[LHR i] LAUB, J.; HRUBY, E.; REICHEL, H.-Ch. et al.: Lehrbuch der Mathematik für die i-te Klasse (i=1,...,4).
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, ab 1985.

[Ma] MAYRHOFER, K.: Inhalt und Maß.
Springer, Wien, 1952.

[Mo] MOORE, G.H.: Zermelo's Axiom of Choice.
Springer, New York, 1982.

[Mt] MATTILA, P.: Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.
Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Pe] PESIN, I.N.: Classical and Modern Integration Theories.
Academic Press, New York, 1970.

[Sa] SAGAN, H.: Space-Filling Curves.
Springer, Berlin, 1996.

[Sch] SCHÜRGER, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie.
Oldenbourg, New York, 1994.

[St] STROMBERG, K.: The Banach-Tarski Paradox.
Amer. Math. Monthly **86**, *(1979), 151 - 161.*

[Wa] WAGON, St.: The Banach-Tarski Paradox.
Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Wl] WALTER, W.: Analysis (2 Bände).
Springer, Berlin, 1985 und 1990.

[Za] ZAANEN, A.: Integration.
North Holland, Amsterdam, 1967.